全品

教辅图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年创始人专注教育行业

全品高考

第二轮专题

The Second Quan-pin Project Study

数学

听课手册

主编 肖德好

沈阳出版发行集团
沈阳出版社

全品高考第二轮专题 数学

高三考生 透析命题 聚焦答卷 » 理想的高考成绩

二轮复习

考试多，时间紧
题量大，做不完？

《全品高考第二轮专题》—— 精 准 透

6大模块统领**二轮复习**

2页作业**限时限量**

9个技能专题**突破高分**

二轮复习 有的放矢

跳出题海 精准备考

只做真正的**新课标 新结构**

精选试题，特别关注高考新试卷结构

知识点命题特点、知识点之间的融合

题干特点、选项特点

设问特点、答题特点

……

抓住**阅卷人眼睛**

1. 数学符号答题。 2. 逻辑清晰，必要的文字说明，条件完整。
3. 字迹清晰整齐，书写规范，注意错别字。

CONTENTS 目录

01 高考专题讲练

高考六大模块题型解法攻略

模块一 函数、导数与不等式

模块二　三角函数、平面向量与解三角形

模块三　数列

模块四　立体几何

模块五　解析几何

思想篇 数学思想方法

思想一　函数与方程思想

函数的思想，是用运动和变化的观点，分析和研究数学中的数量关系，是对函数概念的本质认识，建立函数关系或构造函数，运用函数的图象和性质去分析问题、转化问题，从而使问题获得解决. 如求数列中的项或最值、求解三角形最值(范围)问题、求不等式中的参数、求解析几何中距离或面积的最值等相关的非函数问题，往往都可利用函数思想转化为函数问题.

方程的思想，就是分析数学问题中变量间的等量关系，建立方程或方程组，或者构造方程，通过解方程或方程组，或者运用方程的性质去分析问题、转化和解决问题. 如变量的取值范围、直线与圆锥曲线的位置关系、数列中的基本量、二项式系数等问题.

真题示例

1. [2025·全国一卷] 若一个等比数列的前4项和为4，前8项和为68，则该等比数列的公比为________.

[解法关键]

方法一：利用等比数列的求和公式列出方程组，两式作商即可得解；方法二：利用等比数列的通项公式与前 n 项和的定义，得到关于 q 的方程，解之即可得解；方法三：利用等比数列前 n 项和的性质得到关于 q 的方程，解之即可得解. 答案为 ±2.

2. [2025·全国二卷] 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$，$\boldsymbol{b}=(x-1,2x)$，若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则 $|\boldsymbol{a}|=$________.

[解法关键]

根据向量运算的坐标表示得 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,1-2x)$，再利用向量垂直的坐标表示得到方程，解出 x 的值后再求向量的模即可. 答案为 $\sqrt{2}$.

3. [2022·新高考全国Ⅰ卷] 已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都在同一球面上，若该球的体积为 36π，且 $3\leqslant l\leqslant 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是　　(　　)

A. $\left[18,\frac{81}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{27}{4},\frac{81}{4}\right]$

C. $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$　　D. $[18,27]$

[解法关键]

画出图形，由题意可求出球的半径 $R=3$，设正四棱锥的底面边长为 a，高为 h，由勾股定理可得到 l 与 h 的关系，由 l 的取值范围求出 h 的取值范围，又因为 $a^2=12h-2h^2$，所以正四棱锥的体积 $V(h)=-\frac{2}{3}h^3+4h^2$，利用导数即可求出 $V(h)$ 的取值范围. 答案为C.

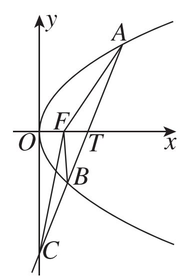
自测题

1. 若直线 l_1：$(m-2)x+3y+3=0$ 与直线 l_2：$2x+(m-1)y+2=0$ 平行，则 $m=$　　(　　)

A. 4　　B. -4

C. 1或-4　　D. -1或4

2. [2025·大连模拟] 如图，设抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F，过点 $T(4,0)$ 的直线 l 与抛物线交于 A,B 两点，与 y 轴的负半轴交于 C 点，已知 $\triangle BCF$ 与 $\triangle ACF$ 的面积比为 $1:3$，则 $|AF|=$________.

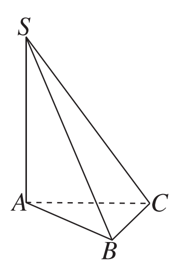


3. [2025·北京朝阳区一模] 在 $\triangle ABC$ 中，$CA=CB=\sqrt{5}$，$AB=4$，点 M 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点且 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM}$ 的最小值为　(　　)

A. 0　　B. $-\frac{16}{25}$

C. $-\frac{4}{5}$　　D. $-\frac{16}{5}$

4. [2025·汕头二模] 如图，在三棱锥 $S\text{-}ABC$ 中，$\triangle ABC$ 为等边三角形，$SA\perp AB$，$SB=SC$，若 $SA+AB=1$，则三棱锥 $S\text{-}ABC$ 的外接球的体积的最小值为________.



思想二　数形结合思想

数形结合是根据数量与图形之间的对应关系，通过数与形的相互转化来解决数学问题的一种重要思想方法.数形结合思想体现了数与形之间的转化，它包含“以形助数”和“以数解形”两个方面.数形结合的实质是把抽象的数学语言与直观的图形语言结合起来，即将代数问题几何化、几何问题代数化.

数形结合思想常用来解决函数零点、方程根与不等式问题，参数范围问题，以立体几何为模型的代数问题，解析几何中的斜率、截距、距离问题等.

真题示例

1. ［2025·全国一卷］已知圆 $x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$ 上到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离为 1 的点有且仅有 2 个，则 r 的取值范围是（　　）

A. $(0,1)$　　B. $(1,3)$

C. $(3,+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

［解法关键］

先求出圆心 $E(0,-2)$ 到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离，然后结合图象，根据半径的变化可以找到到直线的距离为 1 的点有且只有 2 个的圆的临界位置，即可得出结论.答案为 B.

2. ［2024·新课标Ⅰ卷］当 $x\in[0,2\pi]$ 时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为（　　）

A. 3　　B. 4

C. 6　　D. 8

［解法关键］

画出函数 $y=\sin x$ 和函数 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象，由图可知，两曲线有 6 个交点.答案为 C.

3. ［2024·天津卷］在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，点 E 为线段 CD 的三等分点，满足 $CE=\frac{1}{2}DE$，$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}$，则 $\lambda+\mu=$________，若 F 为线段 BE 上的动点，G 为 AF 的中点，则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DG}$ 的最小值为________.

［解法关键］

方法一：以 $\{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\}$ 为基底，根据向量的线性运算求 $\overrightarrow{BE}$，即可得 $\lambda+\mu$ 的值，设 $\overrightarrow{BF}=k\overrightarrow{BE}$，求 $\overrightarrow{AF},\overrightarrow{DG}$，结合向量数量积的运算求 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DG}$ 的最小值；方法二：建立平面直角坐标系，根据向量运算的坐标表示求 $\overrightarrow{BE}$，即可得 $\lambda+\mu$ 的值，设 $F(a,-3a)$，$a\in\left[-\frac{1}{3},0\right]$，求 $\overrightarrow{AF},\overrightarrow{DG}$，结合向量数量积的坐标表示求 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DG}$ 的最小值.答案为 $\frac{4}{3}$，$-\frac{5}{18}$.

自测题

1. ［2025·北京东城区二模］已知 $f(x)=\begin{cases}g(x),x>0,\\-g(x),x<0.\end{cases}$ 下列选项中能使 $f(x)$ 既是奇函数又是增函数的是（　　）

A. $g(x)=x$　　B. $g(x)=x^2$

C. $g(x)=e^x$　　D. $g(x)=\ln|x|$

2. ［2025·河北石家庄一模］在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(0,-1)$，$B(-2,3)$，向量 $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，且 $s-t+3=0(s,t\in\mathbf{R})$，若 Q 为抛物线 $x^2=-2y$ 上一点，则 $|PQ|$ 的最小值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

3. ［2025·福建部分高中联考］已知函数 $f(x)=x|x-a|-\ln x$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,1)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $(-\infty,1]$　　D. $[1,+\infty)$

4. ［2025·广州二模］在平面四边形 $ABCD$ 中，$AC=AD=4$，$\angle CAD=60°$，$\angle ABC=90°$，若 $\triangle ABD$ 的面积是 $\triangle BCD$ 的面积的 2 倍，则 BD 的长度为________.

思想三　分类讨论思想

分类讨论思想就是将一个复杂的数学问题分解成若干个简单的基础问题，通过对基础问题的解答解决原问题的思维策略，实质上就是“化整为零，各个击破，再积零为整”的策略．其研究的基本方向是“分”，但分类解决问题之后，还必须把它们整合在一起．使用分类讨论思想应明白这样几点：一是引起分类讨论的原因；二是分类讨论的原则，分类标准统一，要做到不重不漏；三是明确分类讨论的步骤．

常见的分类讨论问题有以下几种：(1)由概念引起的分类讨论；(2)由性质、定理、公式的限制条件引起的分类讨论；(3)由数学运算引起的分类讨论；(4)图形的不确定性引起的分类讨论；(5)由参数的变化引起的分类讨论．

真题示例

1. ［2024·新课标Ⅱ卷］设函数 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)$，若 $f(x)\geqslant 0$，则 a^2+b^2 的最小值为　　(　　)

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

［解法关键］

方法一：由题意可知，$f(x)$的定义域为$(-b,+\infty)$，分类讨论$-a$与$-b$，$1-b$的大小关系，结合符号分析判断，即可得$b=a+1$，代入可得最值；方法二：根据对数函数的性质分析$\ln(x+b)$的符号，通过分类讨论进而可得$x+a$的符号，即可得$b=a+1$，代入可得最值．答案为C.

2. ［2024·全国甲卷］有6个相同的球，分别标有数字1，2，3，4，5，6，从中无放回地随机取3次，每次取1个球．设m为前两次取出的球上数字的平均值，n为取出的三个球上数字的平均值，则m与n之差的绝对值不大于$\frac{1}{2}$的概率为________．

［解法关键］

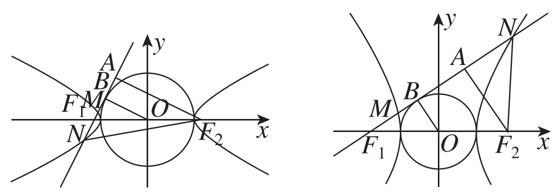
根据排列可求样本点的总数，设前两个球的号码为a，b，第三个球的号码为c，则$a+b-3\leqslant 2c\leqslant a+b+3$，根据$c$的不同取值分类讨论后可求随机事件发生的概率．答案为$\frac{7}{15}$.

3. (多选题)［2022·全国乙卷］双曲线C的两个焦点为F_1，F_2，以C的实轴为直径的圆记为D，过F_1作D的切线与C交于M，N两点，且$\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}$，则$C$的离心率为　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{13}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{17}}{2}$

［解法关键］

依题意不妨设双曲线的焦点在x轴上，过F_1作圆D的切线，切点为B，作$F_2A\perp MA$，垂足为A，利用正弦定理结合三角变换、双曲线的定义得到$2b=3a$或$a=2b$，即可得解，注意就M，N在双支上还是在单支上分类讨论，如图所示．答案为AC.



自测题

1. (多选题)已知曲线C：$x^2+y^2\cos\alpha=1(0<\alpha<\pi)$，则下列结论正确的是　　(　　)

A. 曲线C可能是直线

B. 曲线C可能是圆

C. 曲线C可能是椭圆

D. 曲线C可能是双曲线

2. ［2025·开封二模］将5名学生分配到3个社区当志愿者，每个社区至少分配1名学生，每名学生只去1个社区，则不同的分配方法种数是　　(　　)

A. 24　　B. 50

C. 72　　D. 150

3. ［2025·长春四模］已知函数$f(x)=x+\frac{a}{x}$ $(0<a\leqslant\sqrt{3})$在$[-2,-1]$上的最大值比最小值大$\frac{1}{2}$，则$a=$________．

思想四　转化与化归思想

转化与化归思想是指在解决数学问题时,采用某种手段将问题转化,使问题得以解决的一种思维策略,其核心是把复杂的问题化归为容易求解的问题,将较难的问题化归为较简单的问题,将未能解决的问题化归为已经解决的问题,简单说就是化“生”为“熟”.

常见的转化与化归思想的应用具体表现在:将抽象函数问题转化为具体函数问题,立体几何和解析几何中一般性点或图形问题转化为特殊点或特殊图形,“至少”或“是否存在”等正向思维受阻问题转化为逆向思维,空间与平面的转化,相等问题与不等问题的转化等.

真题示例

1. [2025·上海卷] 已知 $f(x)=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0,\\-1,x<0,\end{cases}$ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是平面内三个不同的单位向量.若 $f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+f(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})+f(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=0$,则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$ 的取值范围是________.

[解法关键]

利用分段函数值分类讨论,可得 $\{f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),f(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}),f(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\}=\{-1,0,1\}$,再根据数量积关系设出 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 坐标,不妨设 $\boldsymbol{b}=(1,0)$,$\boldsymbol{c}=(0,1)$,$\boldsymbol{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$,$\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,利用坐标运算,转化为三角恒等变换求解模的范围可得.答案为 $(1,\sqrt{5})$.

2. [2023·全国乙卷] 已知实数 x,y 满足 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$,则 $x-y$ 的最大值是(　　)

A. $1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. 4

C. $1+3\sqrt{2}$　　D. 7

[解法关键]

本题的转化与化归方向有三种:一是设 $x-y=k$,则 $x=k+y$,代入原方程化简得 $2y^2+(2k-6)y+k^2-4k-4=0$,即转化为此方程有解的问题,利用判别式求解即可;二是令 $x=3\cos\theta+2$,$y=3\sin\theta+1$,其中 $\theta\in[0,2\pi]$,用参数 θ 表示 x,y,则 $x-y=3\cos\theta-3\sin\theta+1=3\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1$,这样 $x-y$ 的最大值问题就转化为与参数 θ 有关的三角函数的最值问题;三是设 $x-y=k$,把此方程看成直线方程,利用圆心到直线的距离公式求最值.答案为C.

自测题

1. [2025·四川巴中一诊] 已知复数 z 在复平面内满足 $|z|\leqslant1$,则复数 z 对应的点 Z 的集合所形成图形的面积为(　　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π

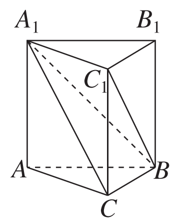
C. $\frac{3}{2}\pi$　　D. 2π

2. [2025·深圳一模] 已知曲线 $y=e^{x-1}$ 与曲线 $y=a\ln x+a(a>0)$ 只有一个公共点,则 $a=$(　　)

A. $\frac{1}{e}$　　B. 1

C. e　　D. e^2

3. [2025·咸阳二模] 在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,$AB\perp AC$,$AB=AC=AA_1=1$,则三棱锥 $C\text{-}A_1BC_1$ 的体积为________.



4. [2025·浙江Z20联盟三联] 已知实数 a,b 满足 $a+b=2$,则 $\frac{a+2b-1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 的最大值为________.

方法篇 解决数学问题的常用方法

方法一 特例法

在解决选择题和填空题时，可以取一个(或一些)特殊数值(或特殊位置、特殊函数、特殊点、特殊方程、特殊数列、特殊图形等)来确定其结果，这种方法称为特例法．特例法只需对特殊数值、特殊情形进行检验，省去了推理论证、繁琐演算的过程，加快了解题的速度．特例法是考试中解答选择题和填空题时经常用到的一种方法，应用得当可以起到“四两拨千斤”的功效．

(1)使用前提：满足当一般性结论成立时，对符合条件的特殊化情况也一定成立．

(2)使用技巧：找到满足条件的合适的特殊化例子，或举反例排除，有时甚至需要两次或两次以上特殊化例子才可以确定结论．

(3)常见问题：求范围、比较大小、含字母求值、恒成立问题、任意性问题等．

真题示例

1. [2025·全国一卷] 已知 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z$，则 x,y,z 的大小关系不可能是( )

A. $x>y>z$　　B. $x>z>y$

C. $y>x>z$　　D. $y>z>x$

[解法关键]

设 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z=m$，对 m 讨论赋值如 $m=2,5,8$ 求出 x,y,z，即可得出大小关系，利用排除法求出．答案为 B.

2. [2024·全国甲卷] 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_9=1$，则 $a_3+a_7=$ ( )

A. -2　B. $\frac{7}{3}$　C. 1　D. $\frac{2}{9}$

[解法关键]

不妨取等差数列的公差 $d=0$，则 $S_9=1=9a_1$，可得 $a_1=\frac{1}{9}$，则 $a_3+a_7=2a_1=\frac{2}{9}$．答案为 D.

3. [2024·新课标Ⅱ卷] 已知曲线 $C:x^2+y^2=16\ (y>0)$，从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线 PP'，P' 为垂足，则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为 ( )

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(y>0)$　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1(y>0)$

C. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1(y>0)$　　D. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{8}=1(y>0)$

[解法关键]

在曲线 C 上取 $P(0,4)$，则 PP' 的中点 M 的坐标为 $(0,2)$，代入 A,B,C,D 四个选项，只有 A 符合．答案为 A.

自测题

1. [2025·重庆名校联盟一模] 已知双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{3}$，F_1,F_2 为 C 的两个焦点，过 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线，垂足为 P，O 为坐标原点，则 $\frac{|PF_1|}{|OP|}=$ ( )

A. $\sqrt{6}$　　B. 2

C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

2. [2025·广东广州一调] 已知空间中四个不同的平面 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 满足 $\alpha_1\perp\alpha_2$，$\alpha_2\perp\alpha_3$，$\alpha_3\perp\alpha_4$，则下面结论一定正确的是 ( )

A. $\alpha_1\perp\alpha_4$

B. $\alpha_1/\!/\alpha_4$

C. α_1 与 α_4 既不垂直也不平行

D. α_1 与 α_4 的位置关系不确定

3. (多选题)[2025·江西南昌一模] 已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，满足 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$，且 $f(1)=1$．则下列说法中正确的是 ( )

A. $f(0)=0$

B. $f(x)$ 为偶函数

C. 6 为 $f(x)$ 的一个周期

D. 点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$ 是 $f(x)$ 的图象的一个对称中心

方法二　验证法

验证法是将选项或特殊值代入题干逐一去验证是否满足题目条件，然后选择符合题目条件的选项的一种方法.在运用验证法解题时，若能根据题意确定代入顺序，则能加快解题速度.

(1)使用前提：各选项可分别作为条件.

(2)使用技巧：可以结合特值法、排除法等先否定一些明显错误的选项，再选择直觉认为最有可能的选项进行验证，这样可以快速获得答案.

(3)常见问题：题干信息不全、选项是数值或范围、正面求解或计算繁琐的问题等.

真题示例

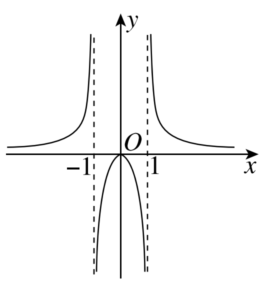
1. [2025·全国一卷] 已知点$(a,0)(a>0)$是函数$y=2\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$图象的一个对称中心，则$a$的最小值为　　(　　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{4\pi}{3}$

[解法关键]

将每个选项带入验证函数值是否为0或者不存在，将A,C的值代入函数值不为0，将B,D的值代入函数值为零，选最小的即为B.答案为B.

2. [2025·天津卷] 已知函数$y=f(x)$的图象如图，则$f(x)$的解析式可能为　　(　　)



A. $f(x)=\frac{x}{1-|x|}$

B. $f(x)=\frac{x}{|x|-1}$

C. $f(x)=\frac{|x|}{1-x^2}$

D. $f(x)=\frac{|x|}{x^2-1}$

[解法关键]

先由函数奇偶性排除A,B，再由$x\in(0,1)$时验证函数值的正负情况可得解.答案为D.

3. [2024·新课标Ⅱ卷] 设函数$f(x)=a(x+1)^2-1$，$g(x)=\cos x+2ax$(a为常数)，当$x\in(-1,1)$时，曲线$y=f(x)$与$y=g(x)$恰有一个交点，则$a=$　　(　　)

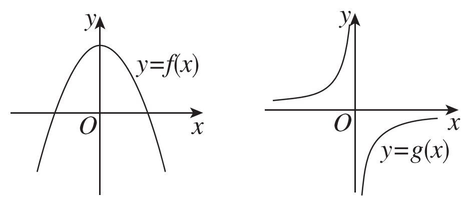
A. -1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

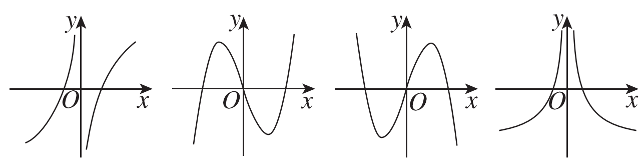
[解法关键]

令$h(x)=f(x)-g(x)$，$x\in(-1,1)$，原问题等价转化为$h(x)$有且仅有一个零点，可知$h(x)$为偶函数，根据偶函数图象的对称性可知$h(x)$的零点只能为0，可得$a=2$，并代入检验即可.答案为D.

自测题

1. 已知函数$y=f(x)$与$y=g(x)$的图象如图所示，则函数$y=f(x)g(x)$的图象可能是　　(　　)





A　　B　　C　　D

2. [2025·江西鹰潭一模] 已知直线$l_1:mx+y+m=0$和$l_2:x-my-3=0$相交于点P，则点P的轨迹方程为　　(　　)

A. $(x-1)^2+y^2=4$

B. $(x+1)^2+y^2=4$

C. $(x-1)^2+y^2=4(x\neq-1)$

D. $(x+1)^2+y^2=4(x\neq1)$

3. [2025·南宁三中模拟] 已知函数$f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$在区间$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增且存在零点，则$\omega$的取值范围是　　(　　)

A. $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right]\cup[5,6]$

B. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\cup\left[5,\frac{16}{3}\right]$

D. $[5,6]$

方法三　构造法

构造法是一种创造性的解题方法，它很好地体现了数学中的发散、类比、转化思想，是指根据题设条件和结论的特征、性质，运用已知数学关系式和理论，构造出满足条件或结论的数学对象，从而使原问题中隐含的关系和性质在新构造的数学对象中清晰地展现出来，并借助该数学对象方便快捷地解决数学问题的方法.构造法应用的技巧是"定目标构造"，需从已知条件入手，紧扣要解决的问题，把陌生的问题转化为熟悉的问题.解题时常构造函数、方程、几何图形等.

(1)使用前提：所构造的函数、方程、几何图形等要合理，不能超出原题的限制条件.

(2)使用技巧：对于不等式、方程、函数问题常采用构造新函数，对于不规则的几何体常构造成规则几何体处理.

(3)常见问题：比较大小、函数导数问题、不规则的几何体问题等.

真题示例

1. [2022·新高考全国Ⅰ卷] 设 $a=0.1e^{0.1}$，$b=\frac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则 (　　)

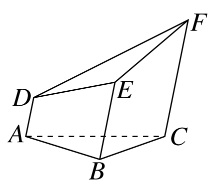
A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$

C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

[解法关键]

构造函数 $f(x)=(1-x)e^{x}(0<x<1)$，$g(x)=xe^{x}+\ln(1-x)(0<x\leqslant 0.1)$，利用函数的单调性可得结果.答案为 C.

2. [2024·天津卷] 一个五面体 $ABC\text{-}DEF$ 如图所示，已知 $AD/\!/BE/\!/CF$，且两两之间的距离为1，并已知 $AD=1$，$BE=2$，$CF=3$，则该五面体的体积为 (　　)



A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}$

[解法关键]

采用补形法将五面体 $ABC\text{-}DEF$ 补成一个棱柱，再利用体积公式求解即可.答案为 C.

3. [2024·全国甲卷] 曲线 $y=x^{3}-3x$ 与 $y=-(x-1)^{2}+a$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的交点，则 a 的取值范围为________.

[解法关键]

令 $x^{3}-3x=-(x-1)^{2}+a$，分离参数 a，构造新函数 $g(x)=x^{3}+x^{2}-5x+1(x>0)$，结合导数求得 $g(x)$ 的单调区间，画出 $g(x)$ 的大致图象，数形结合即可求解.答案为 $(-2,1)$.

自测题

1. [2025·山西吕梁模拟] 在正三棱锥 $S\text{-}ABC$ 中，棱 SA，SB，SC 两两垂直，若 $\triangle ABC$ 的边 $AB=2\sqrt{5}$，则该正三棱锥的外接球的表面积为 (　　)

A. $5\sqrt{30}\pi$　　B. 60π

C. $20\sqrt{15}\pi$　　D. 30π

2. [2025·重庆南开中学模拟] 已知 $x=\ln\frac{3}{2}-\sqrt{3}$，$y=\ln\frac{5}{3}-\sqrt{\frac{10}{3}}$，$z=\ln 2-2$，则 (　　)

A. $x>y>z$　　B. $x>z>y$

C. $z>y>x$　　D. $z>x>y$

3. [2025·成都模拟] 当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，不等式 $e^{x-\ln a}\geqslant\ln ax$ 恒成立，则 a 的最大值为 (　　)

A. e　　B. 1　　C. e^{-1}　　D. e^{2}

4. [2025·梅州模拟] 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在导数 $f'(x)$，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)-f(-x)=2\sin x$，且当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f'(x)>\cos x$.若 $f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-f(t)>\cos t-\sin t$，则实数 t 的取值范围为________.

方法四　逆向思维

在数学解题时，面对某些数学问题，当从正面思考难以顺利解决时就转向反面思考，即逆向思维，这便是“正难则反”的解题策略.如反证法、淘汰法、变换主元法、逆推法、构造反例和旁敲侧击等都是“正难则反”“逆向思维”的体现.反证法是逆向思维的方法之一，它是一种最常见的证明方法，成语“自相矛盾”中“以子之矛攻子之盾”，正是采用了反证法.

(1)使用前提：正向思维进行思考时无法找到解决问题的有效方法或者正向思考分类讨论类别复杂时，可以使用逆向思维.

(2)使用技巧：反向提问，将问题的条件和结论互换，或者考虑相反情况.

(3)常见问题：概率计算中“至少一个发生”“至多一个不发生”等复杂表述，排列组合中对于一些正面计算复杂的情况，立体几何证明，命题真假的判断，唯一性的证明等问题.

真题示例

1. [2024·上海卷] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，定义集合 $M=\{x_0 \mid x_0\in\mathbf{R}, x\in(-\infty,x_0), f(x)<f(x_0)\}$，在使得 $M=[-1,1]$ 的所有 $f(x)$ 中，下列成立的是　　(　　)

A. 存在 $f(x)$ 是偶函数

B. 存在 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取最大值

C. 存在 $f(x)$ 是严格增函数

D. 存在 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取到极小值

[解法关键]

对于A,C,D，利用反证法并结合函数奇偶性、单调性以及极小值的概念即可判断，对于B，构造函数 $f(x)=\begin{cases}-2, x<-1,\\ x, -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, x>1\end{cases}$ 即可判断.答案为B.

2. [2022·北京卷] 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，其前 n 项和 S_n 满足 $a_n\cdot S_n=9(n=1,2,\cdots)$.给出下列四个结论：

①$\{a_n\}$ 的第2项小于3；

②$\{a_n\}$ 为等比数列；

③$\{a_n\}$ 为递减数列；

④$\{a_n\}$ 中存在小于 $\dfrac{1}{100}$ 的项.

其中所有正确结论的序号是________.

[解法关键]

推导出 $a_n=\dfrac{9}{a_n}-\dfrac{9}{a_{n-1}}$，求出 a_1,a_2 的值，可判断①；利用反证法可判断②④；利用数列单调性的定义可判断③.答案为①③④.

自测题

1. [2025·唐山一模] 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}, x^2>0$；命题 q：$\exists x>0, \ln x<0$.则　　(　　)

A. p 和 q 都是真命题

B. p 是假命题，q 是真命题

C. p 是真命题，q 是假命题

D. p 和 q 都是假命题

2. [2025·广东汕尾模拟] 小王数学期末考试考了90分，受到爸爸表扬的概率为 $\dfrac{1}{2}$，受到妈妈表扬的概率也为 $\dfrac{1}{2}$，假设小王受到爸爸表扬和受到妈妈表扬相互独立，则小王被表扬的概率为　　(　　)

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. 1

3. 有甲、乙、丙、丁4名同学站成一排参加文艺汇演，若甲不站在两端，乙和丙不相邻，则不同排列方式共有　　(　　)

A. 12种　　B. 8种

C. 6种　　D. 4种

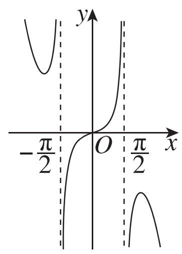
模块一　函数、导数与不等式

微专题 1　函数的图象与性质的应用

考法探析·明规律

微点 1　函数图象与函数解析式

例 1 (1)[2025·天津八校二联] 函数 $f(x)$的部分图象如图所示,则 $f(x)$的解析式可能为　　(　　)



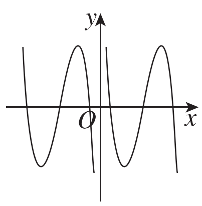
A. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{\cos x}$

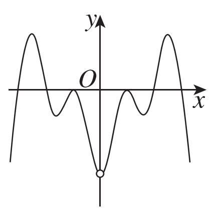
B. $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}$

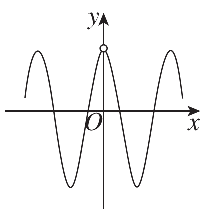
C. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

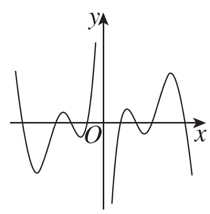
D. $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{\sin x}$

(2)[2025·汕头三模] 函数 $f(x)=\left(x-\dfrac{4}{x}\right)\cos\dfrac{\pi}{2}x$ 的部分图象大致为　　(　　)


A


B


C


D

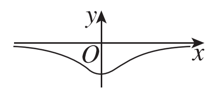
[听课笔记]

【规律提炼】

函数图象与函数解析式都是函数的表达方式,解决这种类型的问题要从定义域、值域、单调性、奇偶性等性质突破,同时也考虑是否过定点或判断特殊函数值的正负.

自测题

1. [2025·天津河北区二模] 箕舌线是平面曲线的一种,因其形状如舌而得名.若箕舌线 $y=f(x)$的部分图象如图所示,则 $f(x)$的解析式可能为　　(　　)



A. $f(x)=\dfrac{4}{|x|+2}$

B. $f(x)=-\dfrac{8}{x^2+4}$

C. $f(x)=-x^4-2$

D. $f(x)=-\dfrac{2}{x^3+1}$

2. [2025·安徽安庆二模] 已知函数 $f(x)=a\cdot 2^{-|x|}+b$ 的图象经过原点,且无限接近直线 $y=2$ 但又不与该直线相交,则　　(　　)

A. 函数 $f(x)$不具有奇偶性

B. $a=2$

C. 函数 $f(x)$的值域为$(-\infty,2)$

D. 函数 $f(x)$的单调递增区间为$[0,+\infty)$

微点 2　函数性质的应用

角度 1　函数的奇偶性与单调性

例 2 (1)(多选题)[2025·全国二卷] 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且当 $x>0$ 时,$f(x)=(x^2-3)e^x+2$,则　　(　　)

A. $f(0)=0$

B. 当 $x<0$ 时,$f(x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$

C. $f(x)\geqslant 2$,当且仅当 $x\geqslant\sqrt{3}$

D. $x=-1$ 是 $f(x)$的极大值点

(2)[2025·山西临汾三模] 已知 $f(x)=\log_2(1+4^{-x})+x$,则满足 $f(2m-3)<f(m)$的实数 m 的取值范围为　　(　　)

A. $(1,3)$　　B. $\left(\dfrac{3}{2},3\right)$

C. $(-\infty,3)$　　D. $(3,+\infty)$

[听课笔记]

【规律提炼】

1. 利用单调性可以比较函数值的大小,但需要将各自变量化到同一单调区间上;

2. 函数的奇偶性可以用来求解析式、画出函数图象并判断单调性;与单调性综合可以解不等式、求最值.

自测题

1. [2024·新课标Ⅰ卷] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a,x<0,\\ e^x+\ln(x+1),x\geqslant 0\end{cases}$ 在 **R** 上单调递增,则 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,0]$　　B. $[-1,0]$

C. $[-1,1]$　　D. $[0,+\infty)$

2. [2025·云南昆明模拟] 已知 $f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数,且 $f(1)=1$,若对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>1$ 恒成立,则不等式 $f(x-1)+1>x$ 的解集为 ( )

A. $(0,1)\cup(2,+\infty)$

B. $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

C. $(-\infty,-2)\cup(0,1)$

D. $(-2,-1)\cup(0,1)$

3. [2024·新课标Ⅱ卷] 设函数 $f(x)=a(x+1)^2-1$,$g(x)=\cos x+2ax$(a 为常数),当 $x\in(-1,1)$时,曲线 $y=f(x)$与 $y=g(x)$恰有一个交点,则 $a=$ ( )

A. -1　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. 1　　D. 2

角度 2　函数的奇偶性、对称性与周期性

例 3 (1)[2025·全国一卷] 已知 $f(x)$为定义在 **R** 上周期为 2 的偶函数,当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时,$f(x)=5-2x$,则 $f\left(-\dfrac{3}{4}\right)=$ ( )

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{4}$

C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

(2)[2025·长郡中学二模] 已知函数 $f(x)=\ln x+x-\dfrac{1}{x}$,若 $f(a)+f(b)=0$,则 a^2+b^2 的最小值为 ( )

A. 1　　B. 2

C. $\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

[听课笔记]

【规律提炼】

1. 奇偶性的本质是函数的图象具有相应的对称性.奇函数的图象关于原点对称;偶函数的图象关于 y 轴对称.

2. 函数的四性之间的关系在一轮复习时讲过,记住常见的二级结论(由对称性得到周期)对提高解题速度很有帮助;可类比三角函数的对称性和周期的关系记忆,数形结合.

3. 利用复合函数的求导方法去理解抽象复合函数的求导.

自测题

1. [2025·沈阳二模] 已知函数 $f(x)$是定义在 **R** 上的偶函数,函数 $g(x)=(x-2)f(x)$的图象关于点(2,0)中心对称,若 $g(-1)=3$,则 $f(3)=$ ( )

A. -3　　B. -1

C. 0　　D. 1

2. 已知定义在 **R** 上的偶函数 $f(x)$满足 $f(x)f(x-2)=4$,$f(x)>0$,$f(2024)=1$,则 $\sum\limits_{i=1}^{2026}f(i)=$ ________.

微点 3　抽象函数的性质

例 4 (1)(多选题)[2023·新课标Ⅰ卷] 已知函数 $f(x)$的定义域为 **R**,$f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$,则 ( )

A. $f(0)=0$

B. $f(1)=0$

C. $f(x)$是偶函数

D. $x=0$ 为 $f(x)$的极小值点

(2)[2025·北京卷] 关于定义域为 **R** 的函数 $f(x)$,以下说法正确的有________.

①存在在 **R** 上单调递增的函数 $f(x)$使得 $f(x)+f(2x)=-x$ 恒成立;

②存在在 **R** 上单调递减的函数 $f(x)$使得 $f(x)+f(2x)=-x$ 恒成立;

③使得 $f(x)+f(-x)=\cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$存在且有无穷多个;

④使得 $f(x)-f(-x)=\cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$存在且有无穷多个.

[听课笔记]

【规律提炼】

抽象函数是指没有给出具体的函数解析式,只给出它的一些特征、性质或一些特殊关系式的函数,常见的解题方法是赋值、利用已知函数模型、形成递推等.

自测题

1. (多选题)[2025·山西大同模拟] 已知函数 $f(x)$的定义域为 **R**,$f[f(x-y)]=f(x)-f(y)$,且 $f(1)=1$,则 ( )

A. $f(2025)=2025$

B. $f[f(2025)]=2025$

C. $f(x)$是奇函数

D. $\sum_{i=1}^{2025} f[f(-i)]=-2025$

2. 已知函数 $f(x)$具有下列性质:

①当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$时,$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+1$;

②$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增;

③$f(x)$是偶函数.

则 $f(0)=$________;函数 $f(x)$可能的一个解析式为 $f(x)=$________.

微专题 2 幂、指、对函数

考法探析·明规律

微点 1 指、对、幂函数的图象与性质

例 1 (1)[2025·辽南协作体三模] 已知 $4^a=6$,$6^b=4$,$c=\ln 2$,则下列结论正确的是 ( )

A. $a^c<b^c$　　B. $c^a>c^b$

C. $\log_c a>\log_c b$　　D. $\log_a c<\log_b c$

(2)[2025·全国一卷] 已知 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z$,则 x,y,z 的大小关系不可能是 ( )

A. $x>y>z$　　B. $x>z>y$

C. $y>x>z$　　D. $y>z>x$

(3)若 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$,则 ( )

A. $\ln(y-x+1)>0$

B. $\ln(y-x+1)<0$

C. $\ln|x-y|>0$

D. $\ln|x-y|<0$

[听课笔记]

【规律提炼】

1. 处理与指、对、幂函数有关的比较大小的方法:

(1)直接利用函数的单调性比较大小(或转化到同一单调区间);

(2)数形结合,利用图象来比较大小;

(3)构造函数,利用单调性比较大小(多结合导数).

2. 熟练掌握指、对数函数的性质,能用其单调性解指、对数不等式问题(注意对数函数的定义域).

自测题

1. [2024·天津卷] 若 $a=4.2^{-0.3}$,$b=4.2^{0.3}$,$c=\log_{4.2}0.2$,则 a,b,c 的大小关系为 ( )

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$

C. $c>a>b$　　D. $b>c>a$

2. [2025·佛山二模] 已知函数 $f(x)=\dfrac{2^x+a}{2^x-1}$ $(a\in\mathbf{R})$,若 p:$f(x)$是奇函数,q:$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,则 p 是 q 的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. 若$\left(\frac{1}{2}\right)^{a}=\log_2 a$,$\left(\frac{1}{2}\right)^{b}=b^2$,$c^{\frac{1}{2}}=2^{-c}$,则正数 a,b,c 大小关系是 ( )

A. $c<a<b$　　B. $c<b<a$

C. $a<c<b$　　D. $a<b<c$

微点2　函数模型

例2 (1)[2025·淄博三模] 随着人工智能技术的快速发展,训练深度学习模型所需的计算量也在急剧增长.某公司现有新一代 AI 芯片 A,B 两套研发方案,若 A 方案中初始计算量为 N_1,每年增长 50%;B 方案中初始计算量为 $N_2(N_2=3N_1)$,每年增长 20%.当 A 方案的计算量大于 B 方案的计算量时,至少经过(参考数据:lg 2≈0.301,lg 3≈0.477) ( )

A. 4年　　B. 5年

C. 6年　　D. 7年

(2)(多选题)[2023·新课标Ⅰ卷] 噪声污染问题越来越受到重视.用声压级来度量声音的强弱,定义声压级 $L_p=20\times\lg\frac{p}{p_0}$,其中常数 $p_0(p_0>0)$ 是听觉下限阈值,p 是实际声压.下表为不同声源的声压级:

声源	与声源的距离/m	声压级/dB
燃油汽车	10	60~90
混合动力汽车	10	50~60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10 m 处测得实际声压分别为 p_1,p_2,p_3,则 ( )

A. $p_1\geqslant p_2$　　B. $p_2>10p_3$

C. $p_3=100p_0$　　D. $p_1\leqslant 100p_2$

[听课笔记]

【规律提炼】

提升函数建模与应用能力的关键是:

1. 识别模型.实际问题中如何抽象出常见的几种函数关系,以指、对数函数模型居多.

2. 参数意义.理解模型中每个参数的实际物理或几何意义.

3. 优化求解.利用函数性质(如单调性、最值)解决实际问题中的最优解问题.

自测题

1. [2024·北京卷] 生物丰富度指数 $d=\frac{S-1}{\ln N}$是河流水质的一个评价指标,其中 S,N 分别表示河流中的生物种类数与生物个体总数.生物丰富度指数 d 越大,水质越好.如果某河流治理前后的生物种类数 S 没有变化,生物个体总数由 N_1 变为 N_2,生物丰富度指数由 2.1 提高到 3.15,则 ( )

A. $3N_2=2N_1$

B. $2N_2=3N_1$

C. $N_2^2=N_1^3$

D. $N_2^3=N_1^2$

2. [2025·武汉四月调考] 为了响应节能减排号召,某地政府决定大规模铺设光伏太阳能板,该地区未来第 x 年底光伏太阳能板的保有量 y(单位:万块)满足模型 $y=\frac{N}{1+\left(\frac{N}{y_0}-1\right)e^{-px}}$,其中 N 为饱和度,y_0 为初始值,p 为年增长率.若该地区 2024 年底的光伏太阳能板保有量约为 20 万块,以此为初始值,以后每年的增长率均为 10%,饱和度为 1020 万块,那么 2030 年底该地区光伏太阳能板的保有量约为________万块.(结果四舍五入保留到整数,参考数据:$e^{-0.5}\approx0.61$,$e^{-0.6}\approx0.55$,$e^{-0.7}\approx0.50$)

微专题6　不等式恒（能）成立问题

考法探析·明规律

微点1　不等式恒成立问题

例1［2025·华中师大一附中模拟］已知函数 $f(x)=(x-a)\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极值点,求 a 的值;

(2)当 $x\geqslant1$ 时,$f(x)\geqslant x+a-1$ 恒成立,求 a 的取值范围.

【规律提炼】

解决恒成立问题有时用“端点效应”的方法处理很方便.

“端点效应”解题步骤:

(1)找必要条件:考虑函数在区间端点值是否具有特殊性,缩小范围;通过不等式成立的必要条件求出参数的取值范围.

(2)证充分条件:通过函数的单调性求解,证明充分性.

自测题

1.［2025·浙江精诚联盟联考］已知函数 $f(x)=e^{x}-\cos x-(2a+2)x$.

(1)当 $a=0$ 时,求函数 $f(x)$ 的极值点个数;

(2)若对任意的 $x\geqslant0$,$f(x)\geqslant0$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

2.［2024·新课标Ⅰ卷］已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^{3}$.

(1)若 $b=0$,且 $f'(x)\geqslant0$,求 a 的最小值;

(2)证明:曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形;

(3)当 $1<x<2$ 时,$f(x)$ 的取值范围是 $(-2,+\infty)$,求 b 的取值范围.

微点2　不等式能成立问题

例2　设函数 $f(x)=a\ln x+\frac{1-a}{2}x^2-bx(a\neq 1)$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为0.

(1)求 b；

(2)若存在 $x_0\geqslant 1$，使得 $f(x_0)<\frac{a}{a-1}$，求 a 的取值范围.

【规律提炼】

对于求不等式恒(能)成立时的参数取值范围问题，一般可以转化为求最值问题. 通常有三种方法：一是分离参数法，使不等式一端是含有参数的式子，另一端是一个区间上具体的函数，通过对具体函数的研究确定含参式子满足的条件；二是分类讨论法，根据参数取值情况分类讨论；三是数形结合法，将不等式转化为两个函数，通过两个函数的图象确定条件.

自测题

［2025·西南“3+3+3”一诊］已知函数 $f(x)=\ln(2x+1)-4\sin x$.

(1)求 $f(x)$ 的图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(2)若存在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，使得 $f(x)\geqslant a$ 成立，求 a 的取值范围.

微点3　双变量问题

例3［2024·新课标Ⅱ卷］设函数 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)$，若 $f(x)\geqslant 0$，则 a^2+b^2 的最小值为　(　　)

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

[听课笔记]

例 4 已知函数 $f(x)=\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ax\right)+x^2-ax$($a$为常数,$a>0$).

(1)当 $f(x)$在 $x=\frac{1}{2}$处取得极值时,若关于 x 的方程 $f(x)-b=0$ 在$[0,2]$上恰有两个不相等的实数根,求实数 b 的取值范围;

(2)若对任意的 $a\in(1,2)$,总存在 $x_0\in\left[\frac{1}{2},1\right]$,使不等式 $f(x_0)>m(a^2+2a-3)$成立,求实数 m 的取值范围.

【规律提炼】

涉及“双变量”或“双参”的问题,往往是构建双变量之间的等量关系式,进而选取其中一个变量作为“主元”,结合消元处理转化为涉及该“主元”的关系式,从而巧妙地将双变量问题转化为单变量问题,借助函数的构建以及导数的应用,通过函数的基本性质来确定对应的最值问题.

自测题

1. [2025·江西八校联考] 已知 $a\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$,若 $\left(\frac{\ln x}{x}-a\right)\left(x+\frac{b}{x}-c\right)\leqslant 0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$恒成立,则$\frac{ac}{b^{\frac{1}{2}}}$的最大值为 ( )

A. $\sqrt{e}$ B. $\frac{2}{e}$ C. $\frac{1}{e^2}$ D. e

2. 已知 $a>0$,函数 $f(x)=ax-xe^x$.

(1)求曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程;

(2)证明 $f(x)$存在唯一极值点;

(3)若存在 a,使得 $f(x)\leqslant a+b$ 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$ 成立,求实数 b 的取值范围.

高分提能一 与零点、极值点有关的证明

【知识链接】

一、与零点、极值点有关的证明问题在近几年高考中有以下特点:

1. 综合性强:融合考查零点存在定理、极值分析、参数讨论.

2. 双变量:需构造对称函数或差(商)函数.

3. 含参问题占主导:需分类讨论参数对单调性、极值点、零点的影响.

4. 注重逻辑链完整性:需严格证明单调性→确定极值→验证零点存在条件(缺一不可).

二、处理方法:

1. 零点存在的证明:①求导定单调区间;②计算区间端点及极值点函数值;③结合零点存在定理或单调性判断.

2. 双变量问题:用零点方程消参;化双变量为单变量;构造差(商)函数分析其单调性.

3. 含参问题:通过导数,根据参数的范围分析函数的单调性,研究其图象的特征,分析其零点或极值点的情况;也可以参变分离,进而转化为研究图象交点的情况.

典型例题

类型一　单一变量

例 1 [2025·福建九地三模] 已知函数 $f(x)=x^2+a\ln(x+1)$.

(1)当 $a=-4$ 时,求 $f(x)$的极小值;

(2)若 $f(x)$存在唯一的极值点 x_0,证明:$f(x_0)+x_0^2\leqslant 0$.

自测题

[2025·广东汕头三模] 已知函数 $f(x)=ax^2+(a-2)x-\ln x$.

(1)当 $a=1$ 时,求 $f(x)$的单调区间.

(2)若 $f(x)$有两个零点,$f'(x)$为 $f(x)$的导函数.

(i)求实数 a 的取值范围;

(ii)记 $f(x)$较小的一个零点为 x_0,证明:$x_0f'(x_0)>-2$.

类型二　零点、极值点双变量的证明

例 2　已知函数 $f(x)=(x-1)\ln x-x-1$. 证明:

(1)$f(x)$存在唯一的极值点;

(2)$f(x)=0$ 有且仅有两个实根,且两个实根互为倒数.

自测题

[2022·全国甲卷] 已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}-\ln x+x-a$.

(1)若 $f(x)\geqslant 0$,求 a 的取值范围;

(2)证明:若 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2,则 $x_1x_2<1$.

类型三　零点与极值点综合

例3 [2025·全国二卷] 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-kx^3$,其中 $0<k<\frac{1}{3}$.

(1)证明:$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上存在唯一的极值点和唯一的零点.

(2)设 x_1,x_2 分别为 $f(x)$在区间$(0,+\infty)$上的极值点和零点.

(i)设函数 $g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$,证明:$g(t)$在区间$(0,x_1)$上单调递减;

(ii)比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小,并证明你的结论.

自测题

已知函数 $f(x)=a\ln(x+1)-xe^{x+1}$.

(1)当 $a<0$ 时,求 $f(x)$的单调区间.

(2)若函数 $f(x)$存在正零点 x_0.

(i)求 a 的取值范围;

(ii)记 x_1 为 $f(x)$的极值点,证明:$x_0<3x_1$.